MA2 – „písemná" přednáška „za" 30. 3. 2020

V minulé „přednášce" – hlavní pojmy byly

1) funkce diferencovatelná v bodě, totální diferenciál;

2) derivace funkce ve směru.

Připomenutí definice:

1. $f : M \subset R^n \to R$, X_0 je vnitřní bod M; existují $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, $i = 1, .., n$.

Říkáme, že f je diferencovatelná v bodě X_0, když platí:

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + \omega(X - X_0), \text{ kde}$$

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\omega(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0 .$$

Výraz $\nabla f(X_0)(X - X_0) = df(X_0)(X - X_0)$ je totální diferenciál funkce f v bodě X_0.

„Rozepsáno": $df(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)(x_2 - x_2^0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)(x_n - x_n^0)$

$(X_0 = (x_1^0, x_2^0, .., x_n^0))$

tj. $$df(X_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)(x_i - x_i^0)$$

a často se značí $x_i - x_i^0 = dx_i$, pak $df(X_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

Pak v okolí bodu X_0 je

$$f(X) \doteq \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)(x_2 - x_2^0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)(x_n - x_n^0)$$

– lineární aproximace funkce („chyba" aproximace – $\omega(X - X_0)$)

A co nebylo zdůrazněno při definování diferencovatelnosti fce minule (omlouvám se):

Pro $n=2$:

Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě (x_0,y_0), pak rovina, jejíž rovnice je

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

se nazývá tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

A odtud: vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$ je normálový vektor tečné roviny v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

(často užitečný vektor ve fyzice – „normála" k ploše, dané grafem nějaké funkce)

A v obecném případě $n>1$

Je-li $f: M\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$, pak množina bodů $(x_1,\dots,x_n,z)\in\mathbb{R}^{n+1}$, pro které platí

$$z = f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,\dots,x_n^0)(x_1-x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0,\dots,x_n^0)(x_n-x_n^0)$$

(také zapsáno: $z = f(X_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)(x_i-x_i^0)$)

se nazývá tečná nadrovina grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)]\in\mathbb{R}^{n+1}$

2. Derivace funkce f v bodě X_0 ve směru vektoru $\vec{a}$ ($\|\vec{a}\|=1$):

$$\frac{df}{d\vec{a}}(X_0) = \frac{d}{dt} f(X_0+t\vec{a})\Big|_{t=0},$$

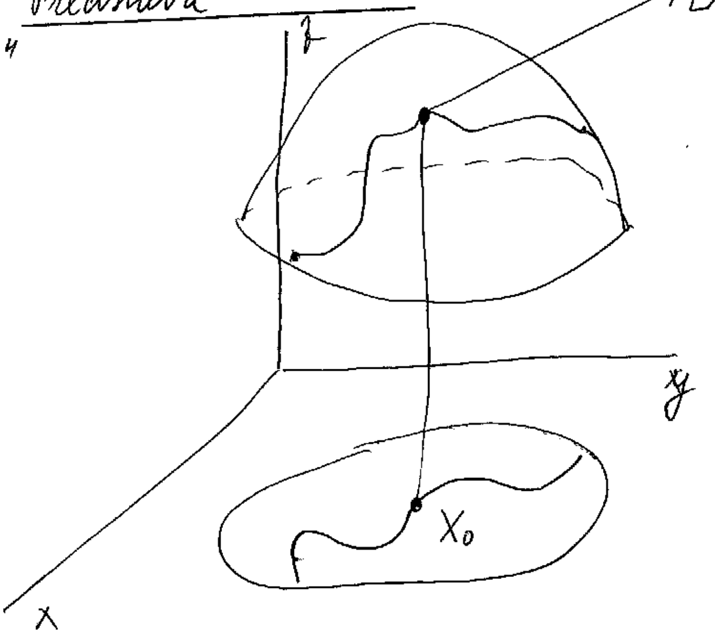
a je-li funkce f diferencovatelná v bodě X_0, pak

$$\frac{df}{d\vec{a}}(X_0) = \nabla f(X_0).\vec{a} \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0).a_i\right)$$

A „význam" derivace f ve směru $\vec{a}$ – udává rychlost změny „řezu" grafu funkce f rovinou (pro $n=2$) kolmou k rovině $z=0$ se stopou „$X = X_0 + t\vec{a}$, $t \in R$" a leží směrnici tečny k tomuto „řezu" (tj. k fci jedné proměnné)

A dále: Zkusme najít rychlost změny funkce po jiné, než „přímé" cestě „po kopci" (tj. na grafu fce f):

„Představa" – $n=2$



$\to [X_0, f(X_0)]$

tj. rychlost „změny f v bodě X_0, tj. změny „kopce" v bodě $[X_0, f(X_0)]$?

„cestu" v D_f lze popsat vektorovou funkcí (pro $n=2$) $\vec{\varphi}(t) = (x(t), y(t))$, pak „cesta" na grafu f je

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$

a rychlost na „cestě grafem" v bodě $t=t_0$: $\vec{r}\,'(t_0) = \left(x'(t_0), y'(t_0), \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=t_0}\right)$

- tedy zde nám chybí „rychlost změny z-ové souřadnice „cesty", tj.

$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \Big|_{t=t_0}$ – předpokládejme, že funkce f je diferencovatelná v bodě $X(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = X_0$ (a budeme značit i $X(t) = (x(t), y(t))$); a existuje $X'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$:

pak

$$\underline{\frac{d}{dt} f(X(t))\Big|_{t=t_0}} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(X(t)) - f(X(t_0))}{t - t_0} \underset{\substack{\text{existuje} \\ df(X_0)}}{=}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \left(\frac{\nabla f(X(t_0))(X(t) - X(t_0))}{t - t_0} + \frac{\omega(X(t) - X(t_0))}{t - t_0} \right)$$

$$= \underline{\nabla f(X(t_0)) \cdot X'(t_0)}, \text{ neboť}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0} = X'(t_0) \quad \text{a}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\omega(X(t) - X(t_0))}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \underbrace{\frac{\omega(X(t) - X(t_0))}{\|X(t) - X(t_0)\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|X(t) - X(t_0)\|}{t - t_0}}_{\text{„omezená fce"}} = 0$$

$$\lim_{t \to t_0 \pm} \frac{\|X(t) - X(t_0)\|}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0 \pm} \sqrt{\sum_{i=1} \left(\frac{x_i(t) - x_i(t_0)}{t - t_0} \right)^2} \cdot \frac{|t - t_0|}{t - t_0} =$$

$$= \sqrt{\sum_i (x_i'(t_0))^2} \cdot \operatorname{sgn}(t - t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|X(t) - X(t_0)\|}{t - t_0} \text{ je omezená fce v } P(t_0)$$

„Naš" vzpreň derivace funkce $f(X(t))$ pro $t=t_0$ nezávisel na počtu proměnných funkce f – tedy (asi) platí obecně: (a bez „asi")

<u>Věta</u> (o derivaci složené funkce více proměnných – pro případ, že vnější funkce je funkce $f: M\subset R^n \to R$, a vnitřní funkce je vektorová funkce jedné proměnné, tj. $X(t): U(t_0) \to M\subset R^n$)

1) f je diferencovatelná v bodě $X_0 \in \mathcal{D}f \subset R^n$;

2) $X = X(t)$ má derivaci $X'(t_0)$ $(X(t): U(t_0) \to M)$;

pak existuje $\left.\frac{d}{dt} f(X(t))\right|_{t=t_0} = \nabla f(X(t_0))\cdot X'(t_0)$ $(*)$

nebo „rozepsáno":

$$\frac{d}{dt} f(X(t)) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t_0))\cdot x_i'(t_0)$$

$$(**)\qquad \left(= \frac{\partial f}{\partial x_1}(X(t_0))\cdot x_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X(t_0))\cdot x_2'(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X(t_0))\cdot x_n'(t_0)\right)$$

Tento vzorec se nazývá v podobě $(**)$ „řetízkové pravidlo".

A ještě – všimněte si, že vzorec pro derivování složené funkce $f(X(t))$ má v podobě „$(*)$ opět charakter návodu pro derivování „složené" funkce jedné proměnné (ZS) –

– opět („derivace fce vnější – zastoupená gradientem, tj. vektorem všech derivací") $\cdot$ (vektor derivací fce vnitřní)

– „<u>důsledek" „skvěle" vymyšleného značení</u> (a pojmů) –

– $\nabla f(X(t_0))\cdot X'(t_0)$ – gradient f, derivace vektorové fce, skalární součin

Poznámka: Předpoklady věty jsou splněny (viz minulá „přednáška"), když f má spojité všechny parciální derivace 1. řádu v bodě $X_0 = X(t_0)$;

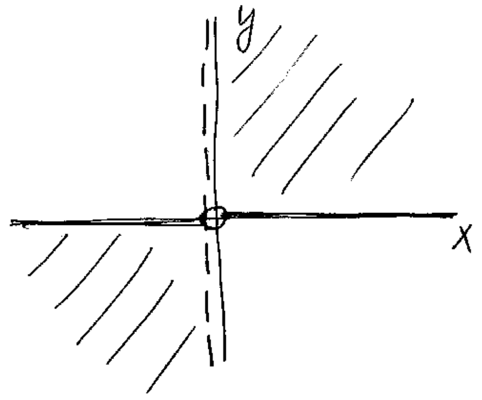
Tedy, dobré budou funkce, které budou mít spojité parciální derivace 1. řádu ve všech vnitřních bodech z Df (v takových jsme parciální derivace definovali) – je „dobré" označení množiny všech bodů vnitřních množiny M – značme

M^0 – „vnitřek" množiny M

A „u nás" bude většinou splněno, že f má spojité derivace v Df^0 1. řádu – budeme značit: $f \in C^{(1)}(Df^0)$

Příklad 1. („technický") $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y} + \frac{y}{x}$ a $(x(t), y(t)) = (t^2, \ln t) = X(t)$

1) $f(x,y)$ je definovaná pro $x \neq 0$
a $x \cdot y \geq 0$



pro $(x,y) \in Df^0$ (tj. $y \neq 0$)

je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y - \frac{y}{x^2}$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x + \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v $Df^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f je diferencovatelná v Df^0 $(f \in C^{(1)}(Df^0))$

2) $X(t) \in Df$ pro $t \in (1, +\infty)$, tj. $X'(t) = \left(2t, \frac{1}{t}\right)$ v $(1, +\infty)$

a pak $f(X(t)) = g(t) = \sqrt{t^2 \ln t} + \dfrac{\ln t}{t^2}$ v $(1,+\infty)$;

můžeme derivovat „po staru" – jako funkci jedné proměnné:

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t^2 \ln t}}\,(2t\ln t + t) + \frac{\frac{1}{t}\cdot t^2 - \ln t \cdot 2t}{t^4} =$$

$$\underset{(t>0)}{=} \frac{1}{2\sqrt{\ln t}}\,(2\ln t + 1) + \frac{1 - 2\ln t}{t^3}, \quad t \in (1,+\infty)$$

A zkusme řetízkové pravidlo – někdy je derivování tímto způsobem jednodušší (ale musíme zase znát „těžší" pravidlo), ale jak uvidíme, řetízkové pravidlo je užitečné i v obecné podobě.

Tedy 1) řetízkové pravidlo lze použít, neboť $f \in C^1(\mathcal{D}f^0)$:
„Složíme parciální derivace f z 1) a derivace $(x'(t), y'(t))$ z (2):

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \underset{(2)}{=}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, \ln t)\cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, \ln t)\cdot \frac{1}{t} \underset{(1)}{=}$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{t^2\ln t}}\cdot \ln t - \frac{\ln t}{(t^2)^2}\right)\cdot 2t + \left(\frac{1}{2\sqrt{t^2\ln t}}\cdot t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\cdot \frac{1}{t} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t^2\ln t}}\,(2t\ln t + t) + \frac{1 - 2\ln t}{t^3}, \quad t \in (1,+\infty)$$

tedy – naštěstí stejný výsledek!

Příklad 2.

A nyní „hezký" příklad užití „řetízkového" pravidla:
(zmíněná nahoře „užitečnost řetízkového pravidla – vnější funkce zde bude „obecná")

Mějme $f(X)$, $X \subset \mathcal{D}f^0 \subset R^n$; pak nechť známe $X = X(t)$ vrstevnici (tj. charakteristickou křivku):

tj.: $\underline{f(X(t)) = k}$ $\quad (k \in \mathcal{H}f;\ t \in (a,b))$, $f \in C^1(\mathcal{D}f^0)$;
(k – konstanta)

Pak ale $\frac{d}{dt} f(X(t)) = 0$ v (a,b), ale také

platí $\frac{d}{dt} f(X(t)) = \nabla f(X(t)) \cdot X'(t)$

$\Longrightarrow$ „snadno" a „obecně"

$$\nabla f(X(t)) \cdot X'(t) = 0 \quad !$$

$$\underbrace{\nabla f(X(t))}_{\substack{\text{gradient } f \\ \text{v bodě } X(t)}} \cdot \underbrace{X'(t)}_{\substack{\text{tečný vektor} \\ \text{k vrstevnici v bodě } X(t)}}$$

Tak snadno se dá ukázat, že pro $\nabla f(X(t)) \neq \vec{o}$, a $X'(t) \neq \vec{o}$ platí, že $\underline{\nabla f(X(t)) \perp X'(t)}$ (tj. gradient míří „kolmo" k vrstevnici – srozumitelné s tím, že ukazuje směr „nejrychlejší" změny fce f)

Příklad 3 1) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (tj. vzdálenost bodu $X[x,y,z]$ od počátku)

2) $X = X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ – „trajektorie" v R^3

nechť ex. $X'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, $t \in (a,b)$

a $X(t) \neq \vec{o}$ v (a,b)

složená funkce $g(t) = f(X(t)) = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}$

(udává vzdálenost bodu $X(t)$ trajektorie od počátku)

a díky předpokladům o $X(t)$ a $f(X) \in C^1(R^3 \setminus \{0\})$:

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}} \left(2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + 2z(t).z'(t)\right) =$$

$$= \frac{X(t)}{\|X(t)\|} \cdot X'(t)$$

(spočítáno „po staru")

a „nově" - řetízkové pravidlo: $X = (x,y,z)$

$$\nabla f(X) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (x,y,z) = \frac{1}{\|X\|} \cdot X$$

a $X'(t) = (x(t), y(t), z(t))' = (x'(t), y'(t), z'(t))$,

tedy (opět): $\frac{d}{dt} f(X(t)) = \nabla f(X(t)) \cdot X'(t) = \frac{1}{\|X(t)\|} (X(t) \cdot X'(t))$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}} \left(x(t)x'(t) + y(t).y'(t) + z(t).z'(t)\right)$$

(za našich předpokladů)

A dále, umíme-li derivovat složenou funkci, kde vnější funkce je funkce n-proměnných a vnitřní funkce je funkce jedné proměnné, umíme i parciální derivace funkce (neboť zde se „nedá" jen jedna proměnná" složka bodu a ostatní jsou „konstantní" – tedy „derivujeme jen funkci, popsanou „shora".

Věta (o derivaci složené funkce více proměnných)

Mějme: $f : U(Y_0) \subset R^n \to R \quad (f(Y) = f(y_1, y_2, \dots y_n))$

$\varphi : U(X_0) \subset R^m \to R^n, \quad \varphi(X_0) = Y_0$ a

$\varphi(U(X_0)) \subset U(Y_0)$

a označme $g(X) = f(\varphi(X)) = f(\varphi_1(x_1,..,x_m), \varphi_2(x_1,..,x_m), \dots \varphi_n(x_1,..x_m))$.

Pak je-li 1) f diferencovatelná v bodě Y_0 (např. tehdy, když $f \in C^1(U(Y_0))$)

2) $\exists \; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(X_0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}(X_0), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(X_0) \right)$,

pak existuje

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(X_0) = \nabla f(\varphi(X_0)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X_0)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(X_0)$$

(tj. opět „lidově" – derivace složené funkce je „derivace vnější fce" $\cdot$ derivace vnitřní fce ($\cdot$ – skalární součin)

(a v rozepsání součet všech $\frac{\partial f}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$", $k = 1, 2, \dots, n$ – zase „známý" vzorec ($n \times$ uplatněný zde))

Příklad (technický) (nebude konkrétní zadaná, jde o „řetězové pravidlo")

1) $f(u,v)$ – obecná, $f \in C^{(1)}(R^2)$

2) $u(x,y) = x^2y$, $v(x,y) = \frac{x}{y}$

$\Rightarrow \underline{g(x,y) = f\left(x^2y, \frac{x}{y}\right)}$

$\mathcal{D}g = \{[x,y];\ y \neq 0\}$

Za předpokladu $f \in C^{(1)}(R^2)$ má $g(x,y)$ parciální derivace v $\mathcal{D}g$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$$

a analogicky opět užijeme „řetězové" pravidlo:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right) \cdot x^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y, \frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

A ukažme parciální derivace 2. řádu (předpokládejme $f \in C^2(R^2)$):

Zde se zrovna hodí nějaké zobecnění „pravidla dírového", které občas pomohlo „méně" pokročilým při začátku práce s vzorcem pro derivování složených funkcí v MA1.

„Pomůcka" zde:

$$\text{„}\frac{\partial}{\partial x}(\ \ ) = \frac{\partial(\ )}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\ )}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\text{"} \quad \text{a podobně}$$

$$\text{„}\frac{\partial}{\partial y}(\ \ ) = \frac{\partial(\ )}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial(\ )}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

(tj. „zůstává" stejný gradient $\left(\frac{\partial(\ )}{\partial u}, \frac{\partial(\ )}{\partial v}\right)$, „mění" se derivace vnitřních funkcí – „podle x, pak podle y)

Tedy:

zde derivujeme „součin"

$$\underline{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right) =$$

$$= 2y\,\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + 2xy\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\right) + \frac{1}{y}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\right) =$$

$$= 2y\,\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + 2xy\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right] +$$

$$+ \frac{1}{y}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right]$$

$$= \underline{2y\,\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + 2xy\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right] +}$$

$$\underline{+ \frac{1}{y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right]}$$

Asi je „trošku" složité v tom výpočtu – se „vyznat", ale zkuste to – podaří se to!

<u>A teď ještě „rychleji"</u> (a zkuste si to projít „krok po kroku")

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right)$$

$$= 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + 2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right) +$$

$$+\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\cdot x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)$$

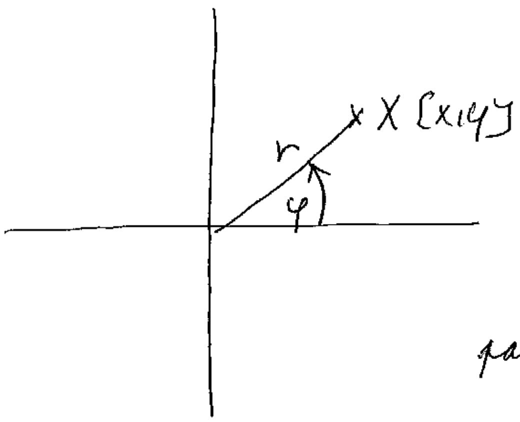
a $\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,y)$ (zde záměnnost), a $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ zkuste sami!

A příklad, kde se řetízkové pravidlo „uplatní“:

a) Máme řešit diferenciální rovnici (t.zv. parciální dif. rovnici)

$$(*) \qquad x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad - \ ?\ f(x,y) \in C^{(1)}(R^2)$$

Pro nás je jistě taková rovnice „záhadou“, ale „autoři“ vědí, že řešení závisí jen na vzdálenosti bodu (x,y) od počátku (tak „vznikl“ model v podobě dif. rovnice)
A pro takovouto situaci se „hodí“ jiné souřadnice, než na které jsme „zvyklí“, tj. kartézské – i pro nás budou (u vícenásobných integrálů) t.zv. souřadnice polární:



poloha bodu $X \neq [0,0]$ udána:
1) vzdálenost bodu X od počátku O – $\underline{r} > 0$
2) úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ který svírá „spojnice“ O a X s kladnou poloosou x.

pak: $x = r\cos\varphi \ (= x(r,\varphi))$, $r \in (0, +\infty)$
$y = r\sin\varphi \ (= y(r,\varphi))$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

Pak hledáme místo původní funkce $f(x,y)$ hledáme funkci $\Phi(r,\varphi)$ tak, že $\Phi(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ (*)

a transformace rovnice (*) vlastně znamená „vyjádřit (nahradit) $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ pomocí $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$“;

A zde užijeme „řetízkové pravidlo, pro derivování složené“ funkce v (*): $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$:
(předpoklady jsou „dostatečné“)

Je-li $\phi(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, pak (píšeme „stručněji")

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\varphi \\ \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

soustava rovnic pro $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ (řešením dostaneme „náhrady" těchto derivací)

determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi, & \cos\varphi\cdot r \end{vmatrix} = r \neq 0 \ (\text{pro } r>0),$$

tedy soustava má právě 1 řešení pro každý bod $(r,\varphi) \in (0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi)$, a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\cos\varphi$$

a dosazením do rovnice (*) dostaneme:

$$r\cos\varphi\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\cos\varphi\right) - r\sin\varphi\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\sin\varphi\right) = 0$$

tj. $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0$, tedy

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 0 \Rightarrow \phi(r,\varphi) = \varphi(r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

tedy (opět ke kartézským souřadnicím) – řešení rovnice (*) je

$$f(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad \varphi \in C^1(0,+\infty))$$

$x^2+y^2>0$, tj. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$

b) Vlnová rovnice v jedné dimensi

(je to i rovnice kmitů - příčných - nekonečně dlouhé struny)

Hledáme funkci $u=u(t,x)$, $x\in R$, $t\geq 0$ tak, aby ($u\in C^2(R\times\langle 0,+\infty))$)

$$(*)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \; a>0$$

$$\text{a}\quad u(0,x)=\varphi(x)\;,\; \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\psi(x)\;,\; x\in R \quad (**)$$

(t.zv. počáteční úloha)

Opět se podaří rovnici (*) vyřešit (a tedy pak i počáteční úlohu) vhodnou transformací souřadnic – zde je návod z fyziky: výchylka v bodě x se šíří oběma směry rychlostí a ($a>0$ je dáno „vlastnostmi" kmitajícího „zařízení")

Transformace souřadnic: $\xi = x-at,\ \eta = x+at$

a funkce hledaná $u(t,x)$ je „transformována" v hledanou funkci $U(\xi,\eta)$ – přičemž je

$$u(t,x) = U(x-at, x+at)\;,\quad U\in C^2(R^2)$$

a pak (užitím „řetízkového" pravidla):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi}(x-at,x+at)(-a) + \frac{\partial U}{\partial \eta}(x-at,x+at)\cdot a$$

$$\text{a}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(x-at,x+at)(-a)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}\cancel{(-''-)}(-a)\cdot a + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(-''-)\,a^2$$

$$\text{a}\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}(x-at,x+at) + \frac{\partial U}{\partial \eta}(x-at,x+at) \quad \text{a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(x-at,x+at) + 2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}(-''-) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}(-''-)$$

(označuji $(-''-)$ místo $(x-at,x+at)$ v derivacích U)

a dosadíme-li derivace do rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 ,$$

dostáváme: (vynecháváme zde (ξ,η) v $U(\xi,\eta)$)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} a^2 - 2a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) = 0, \text{ tj.}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta) = 0}$$

a odtud: $\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)(\xi,\eta) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\eta)$ je konstantní vzhledem k proměnné η,

tj. $\frac{\partial U}{\partial \xi}(\xi,\eta) = f(\xi)$ a pak $\underline{U(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)}$,

($F' = f$, $G(\eta)$ je konstanta vzhledem „ke ξ)

a tedy máme: $\underline{u(t,x) = F(x-at) + G(x+at)}$, $x \in R, t \geq 0$

a počáteční podmínky:

$$u(0,x) = \varphi(x): \quad F(x) + G(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x): \quad -aF'(x) + aG'(x) = \psi(x) \qquad (2)$$

$$\text{derivací (1)}: \quad F(x) + G'(x) = \varphi'(x) \qquad (1')$$

a řešení soustavy (1'),(2) máme:

$$G'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) + \frac{1}{a}\psi(x)\right) \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \frac{1}{a}\Psi(x)\right)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x) - \frac{1}{a}\psi(x)\right) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) - \frac{1}{a}\Psi(x)\right)$$

$$(\Psi'(x) = \psi(x))$$

Pak řešení počáteční úlohy pro vlnovou rovnici ((*),(**))

je $$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\left(\Psi(x+at)-\Psi(x-at)\right)\right],$$

tj. $$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\,d\tau\right]$$

– D'Alembertův vzorec – „slavný" v matematice – v teorii parciálních diferenciálních rovnic

(ukazuje, jak je hodnota $u(t,x)$ v čase t v „místě" x ovlivněna počátečními podmínkami – počáteční výchylkou v bodech $x-at$, $x+at$ struny a počáteční rychlostí bodů v celém intervalu $\langle x-at, x+at\rangle$.

D'Alembert Jean le Rond (1717–1783) – význačný francouzský matematik, fyzik, filosof, v matematice se zabýval matematickou analýzou.

A na závěr – ještě jednou užijeme užitečné pravidlo – ukážeme t. zv. „invariaci" totálního diferenciálu funkce – – termín často užívaný i v aplikacích

Invariance totálního diferenciálu

Mějme funkci $f \in C^1(\mathcal{U}(X))$, $\mathcal{U}(X) \subset R^n$

$$(\quad f(X) = f(x_1, x_2, \dots x_n) \quad)$$

Totální diferenciál: $\underline{df(X)(dX)} = \nabla f(X) \circ dX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) dx_i$.

a nyní diferenciál složené funkce

$\underline{g(X) = f(\varphi(X))}$, kde $\varphi(X) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots \varphi_n(x_1, \dots x_m))$

$\varphi(X) = Y \in R^n$ a $f \in C^1(\mathcal{U}(Y))$, a

$\varphi_i \in C^1(\mathcal{U}(X))$, $\varphi(\mathcal{U}(X)) \subset \mathcal{U}(Y)$

$$dg(X) = \nabla g(X) \circ dX = \nabla f(\varphi(X)) \circ dX =$$

a

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(X) dx_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right) dx_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X)) \circ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(X) \cdot dx_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X)) \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(X) dx_i \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(\varphi(X)) \circ d\varphi_k(x) = \nabla f(\varphi(X)) \circ d\varphi(X)$$

(označili jsme $d\varphi(X) = (d\varphi_1(X), d\varphi_2(X), \dots d\varphi_n(X))$)

Tedy: $\underline{d f(\varphi(X)) = \nabla f(\varphi(X)) \circ d(\varphi(X)} -$

– opět „stejný" vzorec – „$\nabla F(X) \cdot dX = dF(X)$"